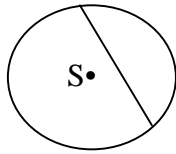


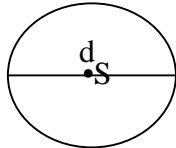
9. PLANIMETRIA

9.1. Okrąg i koło

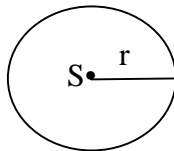
a) Odcinki w okręgu i kole



Cięciwa okręgu (koła) – odcinek łączący dwa dowolne punkty okręgu



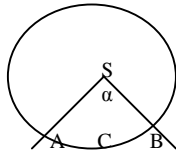
Średnica okręgu (koła) – odcinek łączący dwa dowolne punkty okręgu przechodzący przez środek okręgu (koła)



Promień okręgu (koła) – każdy odcinek łączący środek okręgu z dowolnym punktem na okręgu.

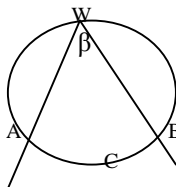
$$r = \frac{1}{2}d$$

b) Kąty w okręgu



Kąt środkowy α w okręgu (kole) – kąt, którego wierzchołkiem jest środek okręgu.

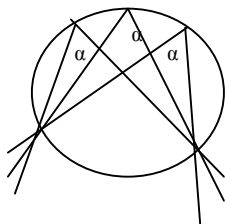
kąt środkowy ASB jest oparty na łuku ACB



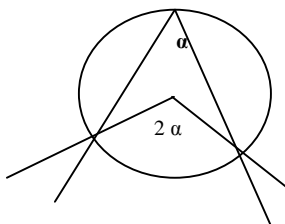
Kąt wpisany β w okrąg (koło) – kąt, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona są półprostymi zawierającymi cięciwy okręgu .

kąt wpisany AWB jest oparty na łuku ACB

Twierdzenia dotyczące kątów środkowych i wpisanych

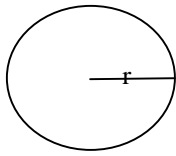


Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe



Kąt wpisany w okrąg jest równy połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku

c) Pole i obwód koła

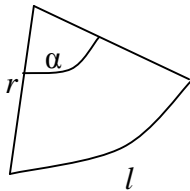


Wzór na pole koła $P = \pi \cdot r^2$

Wzór na obwód koła (długość okręgu)

$Ob = 2\pi \cdot r$

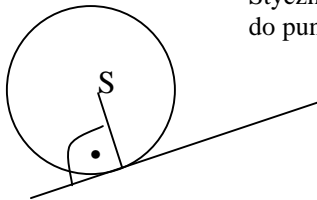
d) Pole wycinka koła i długość łuku



Wzór na pole wycinka koła $P = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi \cdot r^2$

Wzór na długość łuku $l = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi \cdot r$

e) Styczna do okręgu



Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności

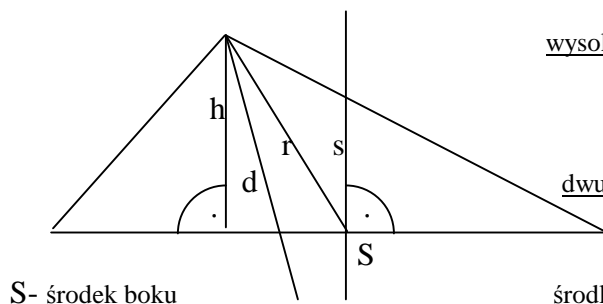
9.2. Trójkąty

a) Klasyfikacja trójkątów

Podział trójkątów ze względu na boki				
	różnoboczny	równoramienny	równoboczny	
Podział trójkątów ze względu na kąty	ostrokątny			
	prostokątny			
	rozwartokątny			

b) Suma kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°

c) **Odcinki i linie w trójkącie**



wysokość trójkąta h – odcinek łączący wierzchołek trójkąta z przeciwnym bokiem, prostopadły do niego.

dwusieczna kąta d – półprosta, która dzieli kąt na pół

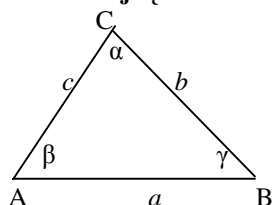
środkowa trójkąta r – odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwnego boku.

S- środek boku

Twierdzenie o środkowych trójkąta: Środkowe trójkąta przecinają się w punkcie, który nazywamy środkiem ciężkości trójkąta. Punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2 : 1 licząc do wierzchołków.

symetralna boku trójkąta s – prosta prostopadła do boku i przechodząca przez jego środek

d) **Przystawanie trójkątów**

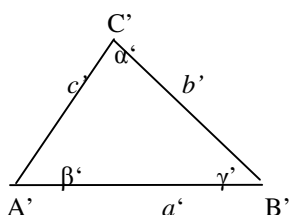


Cechy przystawania trójkątów

Cecha BBB : $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b' \wedge c = c'$

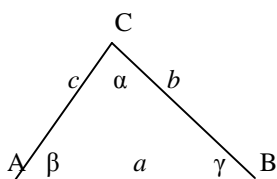
Cecha BKB : $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b' \wedge \gamma = \gamma'$

Cecha KBK : $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Leftrightarrow a = a' \wedge \beta = \beta' \wedge \gamma = \gamma'$



Przystające trójkąty - trójkąty, które mają równe boki i kąty

e) **Podobieństwo trójkątów**

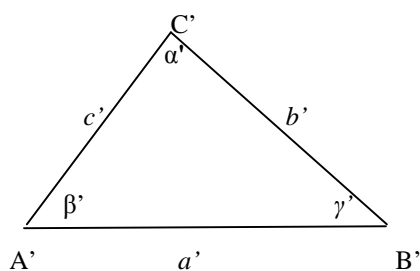


Cechy podobieństwa trójkątów

Cecha BBB: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Cecha BKB : $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \wedge \gamma = \gamma'$

Cecha KKK: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' \wedge \beta = \beta'$

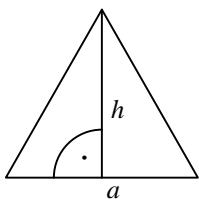


Podobne trójkąty - trójkąty, które mają równe kąty i proporcjonalne boki

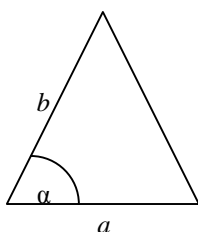
skala podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta A'B'C': $k = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Jeśli k jest skalą podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta A'B'C', to $\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = k^2$

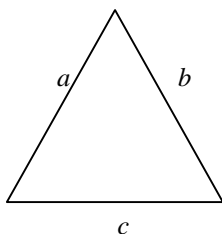
f) Pole trójkąta



$$P = \frac{1}{2} a \cdot h$$

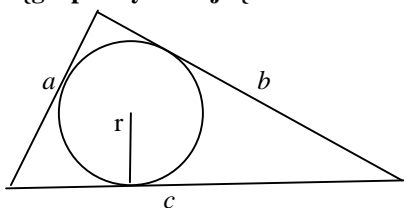


$$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha$$



$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{gdzie } p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

g) Okrąg wpisany w trójkąt



- środkiem okręgu wpisanego w trójkąt jest punkt przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta.
- wzór na promień okręgu wpisanego w trójkąt

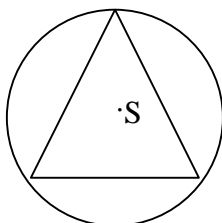
$$r = \frac{2P}{a+b+c} \quad \text{gdzie } P \text{ – pole trójkąta}$$

h) Okrąg opisany na trójkącie

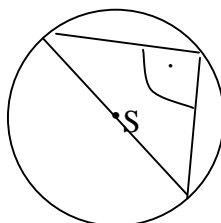
- środkiem okręgu opisanego na trójkącie jest punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta

S – środek okręgu

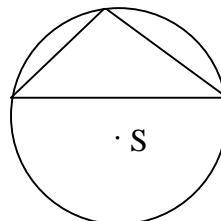
okrąg opisany na trójkącie ostrokątnym

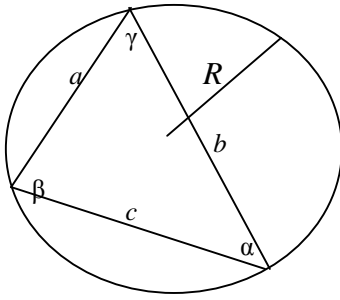


okrąg opisany na trójkącie prostokątnym



okrąg opisany na trójkącie rozwartokątnym



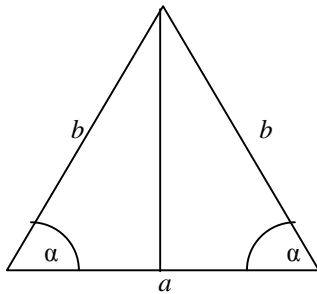


- wzory na promień okręgu opisanego na trójkącie

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4P} \quad \text{gdzie } P \text{ – pole trójkąta}$$

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}$$

i) Trójkąt równoramienny

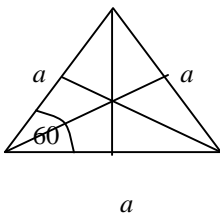


a- podstawa trójkąta

b- ramię trójkąta

- kąty przy podstawie są równe,
- wysokość dzieli podstawę na połowę
- wysokość dzieli kąt między ramionami na połowę

j) Trójkąt równoboczny



- w trójkącie równobocznym wszystkie kąty mają po 60° .
- w trójkącie równobocznym środkowe, symetralne, wysokości, dwusieczne przecinają się w tym samym punkcie, który jest jednocześnie promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt, jak i okręgu opisanego na tym trójkącie.

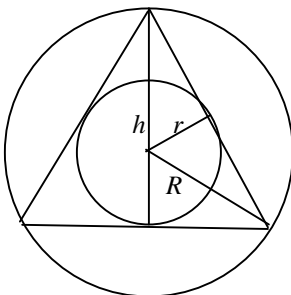
wzór na pole trójkąta równobocznego $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

wzór na wysokość trójkąta równobocznego $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

wzory na promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny

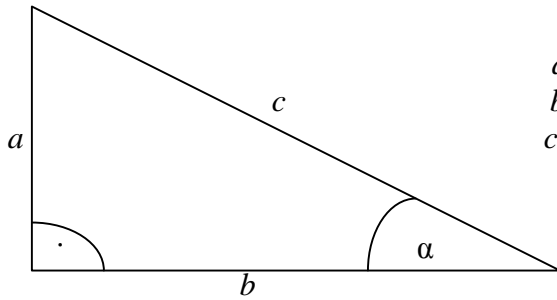
$$r = \frac{1}{3}h \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

wzory na promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym



$$R = \frac{2}{3}h \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

k) Trójkąt prostokątny



a – przyprostokątna naprzeciw α
 b – przyprostokątna przy α
 c – przeciwprostokątna

- twierdzenie Pitagorasa $a^2 + b^2 = c^2$

- funkcje trygonometryczne kąta ostrego

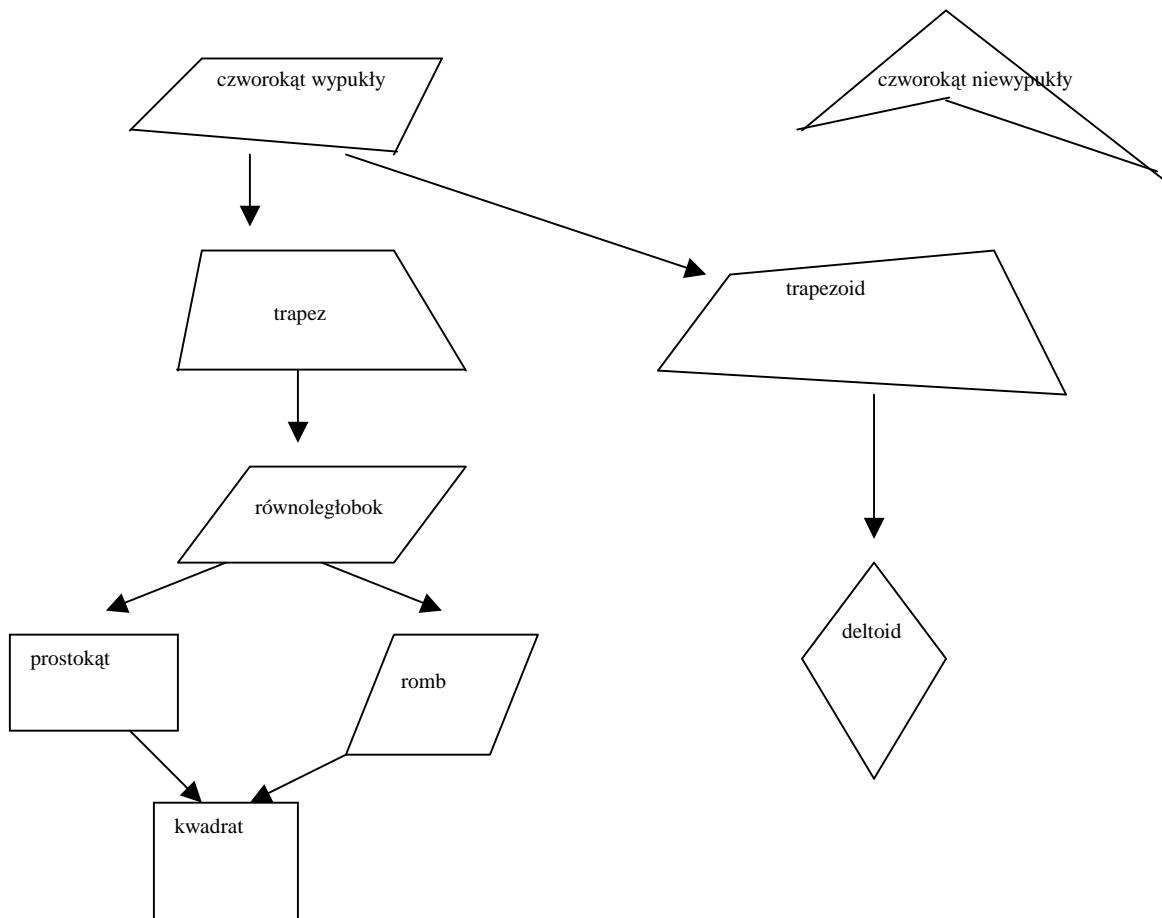
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

- wzór na pole trójkąta prostokątnego: $P = \frac{1}{2} a \cdot b$

- wzór na promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym: $R = \frac{1}{2} c$

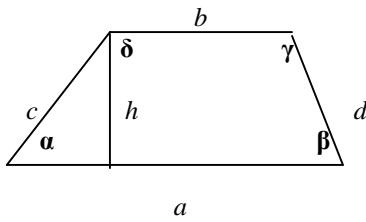
9.3. Czworokąty

a) Klasyfikacja czworokątów



b) Suma kątów wewnętrznych czworokąta jest równa 360°

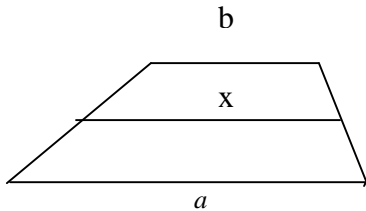
c) Trapez



w trapezie przynajmniej jedna para boków jest równoległa
 a, b – podstawy trapezu

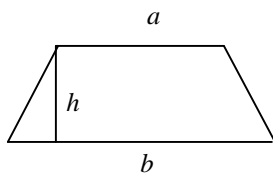
c, d – ramiona trapezu
 h – wysokość trapezu

$$\alpha + \delta = 180^\circ \quad \beta + \gamma = 180^\circ$$



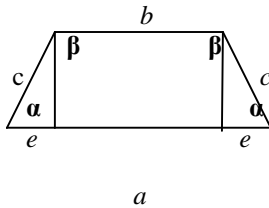
Odcinek łączący środki ramion jest równoległy do podstaw i

wyraża się wzorem $x = \frac{a+b}{2}$



Wzór na pole trapezu : $P = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$

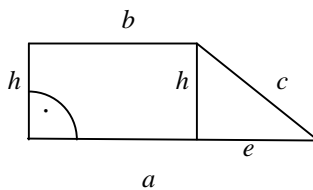
Trapez równoramienny



- kąty wewnętrzne trapezu równoramiennego przy tej samej podstawie są równe,
- przekątne trapezu równoramiennego są równe i dzielą się samym stosunku,

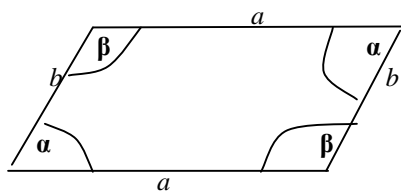
- wzór na e w trapezie równoramiennym: $e = \frac{a-b}{2}$

Trapez prostokątny



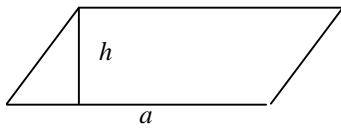
- wzór na e w trapezie prostokątnym : $e = a - b$

d) Równoległobok

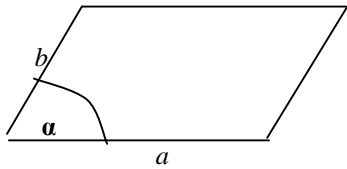


- w równoległoboku przeciwległe boki są równe i równoległe,
- w równoległoboku przeciwległe kąty są równe,
- w równoległoboku $\alpha + \beta = 180^\circ$
- w równoległoboku przekątne przecinają się w połowie

Wzory na pole równoległoboku:

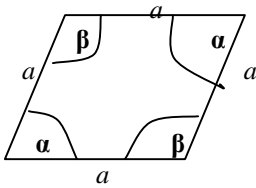


$$P = a \cdot h$$

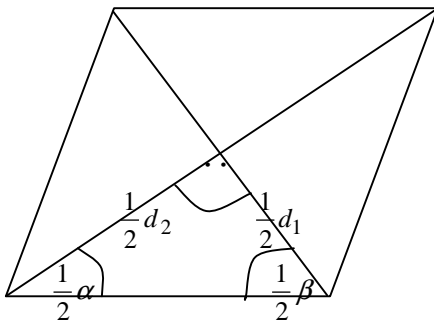


$$P = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

e) **Romb**

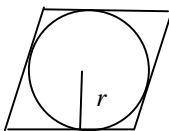


- w rombie wszystkie boki są równe,
- w rombie przeciwległe kąty są równe,
- w rombie $\alpha + \beta = 180^\circ$
-



Przekątne w rombie:

- dzielą się na połowę,
- przecina ją się pod kątem prostym,
- dzielą kąty wewnętrzne na połowę

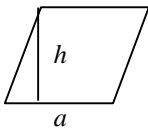


Okrąg wpisany w romb:

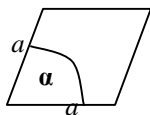
- środek okręgu wpisanego w romb jest punktem przecięcia przekątnych rombu
- wzór na promień okręgu wpisanego w romb

$$r = \frac{1}{2}h$$

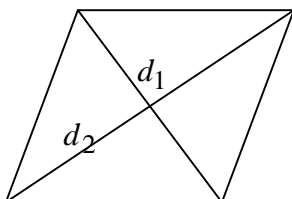
Wzory na pole rombu



$$P = a \cdot h$$

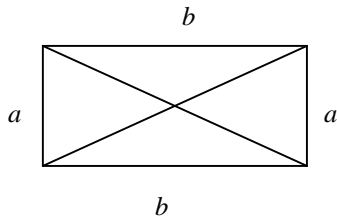


$$P = a^2 \cdot \sin \alpha$$

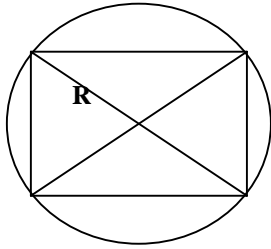


$$P = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$$

f) **Prostokąt**



- przekątne w prostokącie są równe i dzielą się na połowy
- wzór na pole prostokąta: $P = a \cdot b$

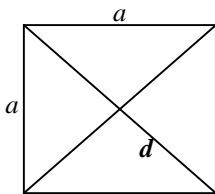


Okąg opisany na prostokącie:

- środkiem okręgu opisanego na prostokącie jest punkt przecięcia przekątnych prostokąta
- wzór na promień okręgu opisanego na prostokącie

$$R = \frac{1}{2}d \quad d - \text{przekątna prostokąta}$$

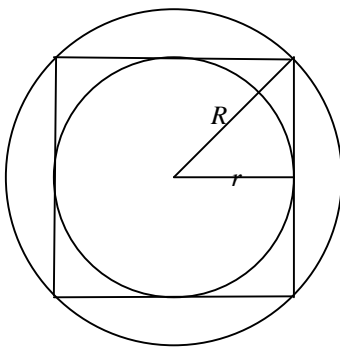
g) **Kwadrat**



- przekątne kwadratu są równe, przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy

- wzór na przekątną kwadratu: $d = a\sqrt{2}$

- wzór na pole kwadratu: $P = a^2$



Okąg wpisany w kwadrat i okąg opisany na kwadracie

- punkt przecięcia przekątnych kwadratu jest środkiem okręgu wpisanego w kwadrat i środkiem okręgu opisanego na kwadracie.

- wzór na promień okręgu wpisanego w kwadrat :

$$r = \frac{1}{2}a$$

- wzór na promień okręgu opisanego na kwadracie:

$$R = \frac{1}{2}d$$